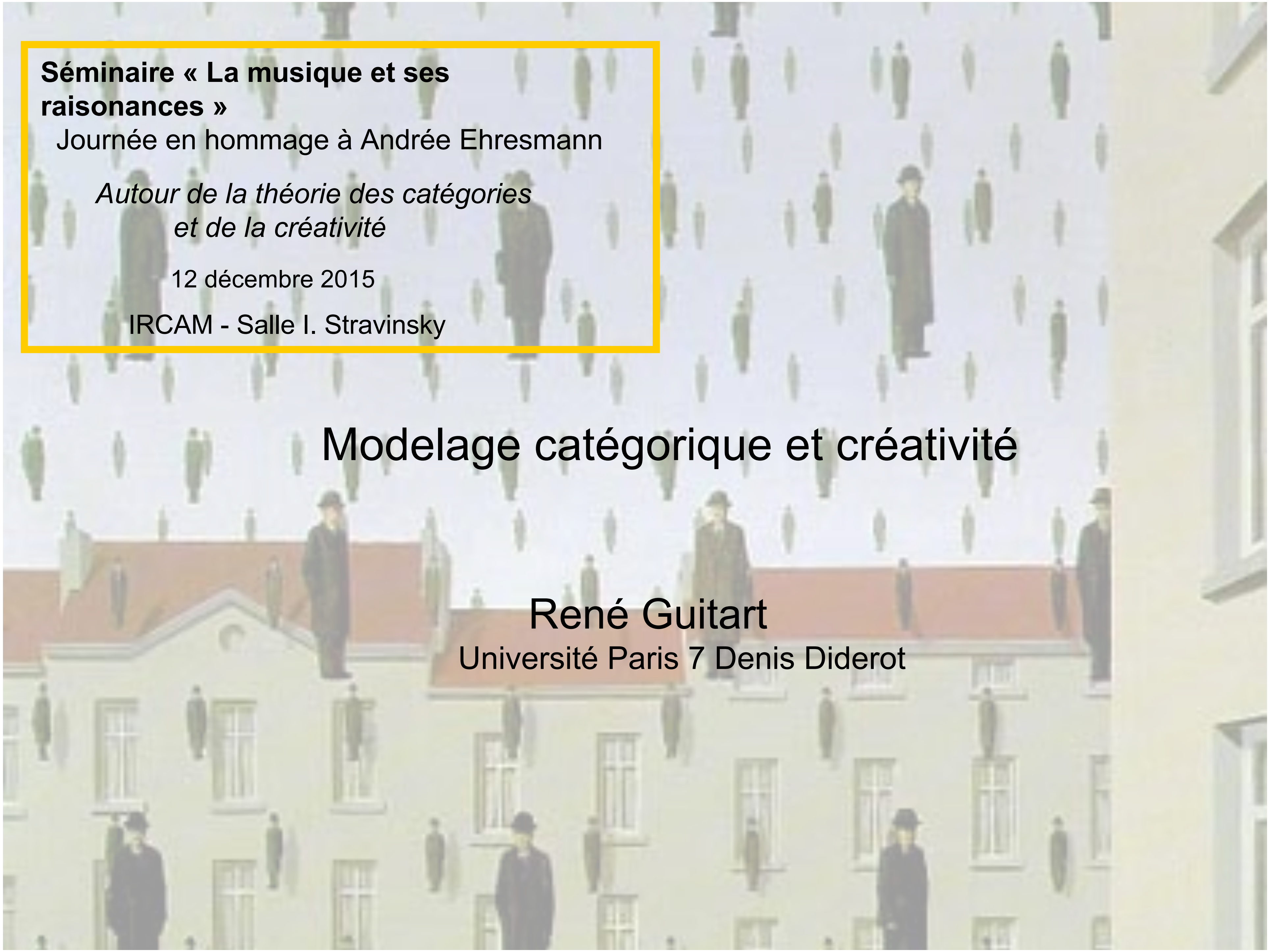


Séminaire « La musique et ses raisonances »

Journée en hommage à Andrée Ehresmann

Autour de la théorie des catégories et de la créativité

12 décembre 2015

IRCAM - Salle I. Stravinsky

Modelage catégorique et créativité

René Guitart

Université Paris 7 Denis Diderot

Méthode

Exposé d'après des éléments du texte:

R. Guitart, ``Categorical Modeling as a method of Invention
in Creative Mathematics: Mathematical Pulsation, Transit, History'', 108 p.

À paraître dans: Guerino Mazzola (Ed.), *The topos of music III: gesture*, Springer, 2017

***

Argument

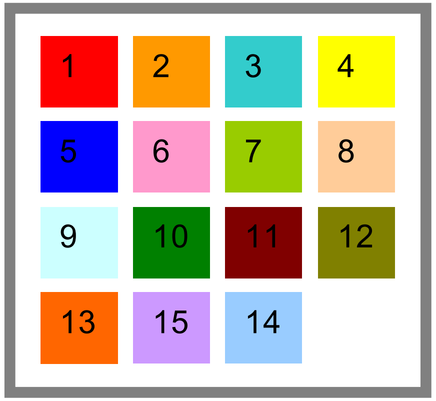
La théorie des catégories procède d'un examen des gestes des mathématiciens au travail, ne vise pas à les fonder, mais à en décrire la fonctionnalité. Dans ces gestes il faut au premier chef retenir la pulsation mathématique et ses conséquences qui sont le caractère indirect du travail, l'éloignement des objets, l'effacement des objets au profit des relations et morphismes, voire la disparition des objets, au profit ultime des preuves, et enfin, dans ces preuves mêmes la disparition du proprement logique au profit du calcul et de l'exactitude, du calcul des invariants, des modifications et formes. In fine la saisie catégoricienne de l'activité mathématique nous entraîne vers le calcul cohomologique en lieu et place de la logique antique.

Cela dit, nous pouvons proposer une méthode de modelage pour toute étude mathématique, à l'image même du travail accompli par les catégoriciens sur l'ensemble des mathématiques et sur la théorie des catégories elle-même.

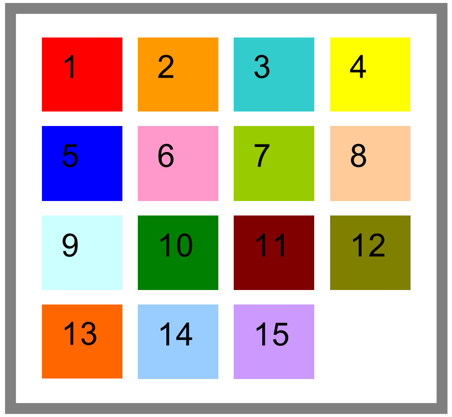
Il s'agit de prôner l'association à tout objet d’une catégorie représentant sa forme d'un certain point de vue, c'est-à-dire ce qui de ce point de vue tourne autour de l'objet, le modèle par ses mouvements, de sorte que la cohomologie de cette forme fournisse ce qui reste invariant. La catégorie associée à l'objet est comme une présentation de celui-ci, et c'est dans son choix que gît le moment d'invention créative. Il s'agit là d'une proposition d'une méthode d'invention, au sens que Descartes donnait à une telle expression. En principe la méthode s'appliquerait à tout domaine d'activité, pourvue que l'on cherche à bâtir un parallèle entre les gestes de cette activité et ceux du catégoricien. L'exposé, après l’étayage sommaire de ce que nous venons d’écrire, montrera quelques exemples, tant d'objets à étudier ainsi que de théorèmes de la méthode (théorèmes de théorie des catégories donc).

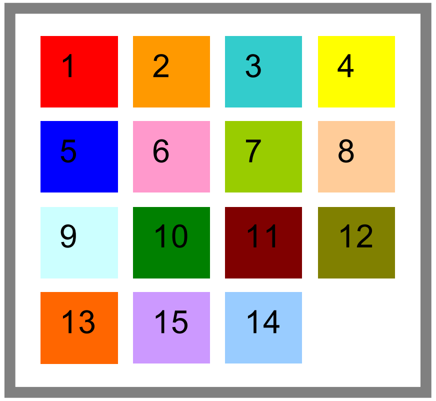
1. Les objets n’existent que comme « présentations en situation », comme semblance, et prétextes à gestes mathématiques.
2. Il y a les gestes mathématiques, qui font transiter d’une présentation à une autre. Analyses, synthèses, formations de nouveaux espaces, pulsation, changement de situation.
3. Le mathématicien invente, crée ou découvre des preuves, qui sont des écritures de chemins laissant traces de gestes, dans des espaces variants au cours même desdites écritures.
4. Les preuves doivent être exactes, et non pas vraies.
5. Logique et vérité constituent une super-structure transcendante au jeu des gestes élémentaires, pour sur-veiller et gérer les possibilités de gestes. Par là se constituent de nouveaux espaces de preuves, qui restent facultatifs. Il faut une Logique diagrammatique, adaptée aux gestes.
6. Les questions de fondements sont facultatives aussi. Il faut une Source d’activité.
7. L’alternative effective à la logique est le calcul des invariants, la Cohomologie, qui contrôle l’exactitude.

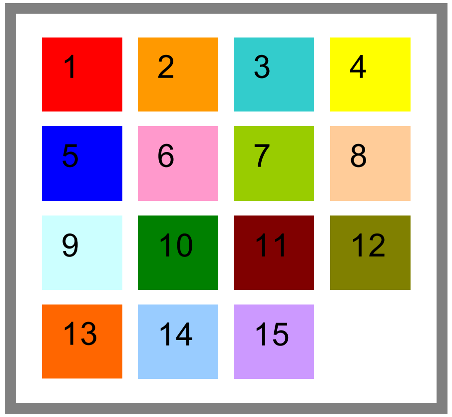
Exemples

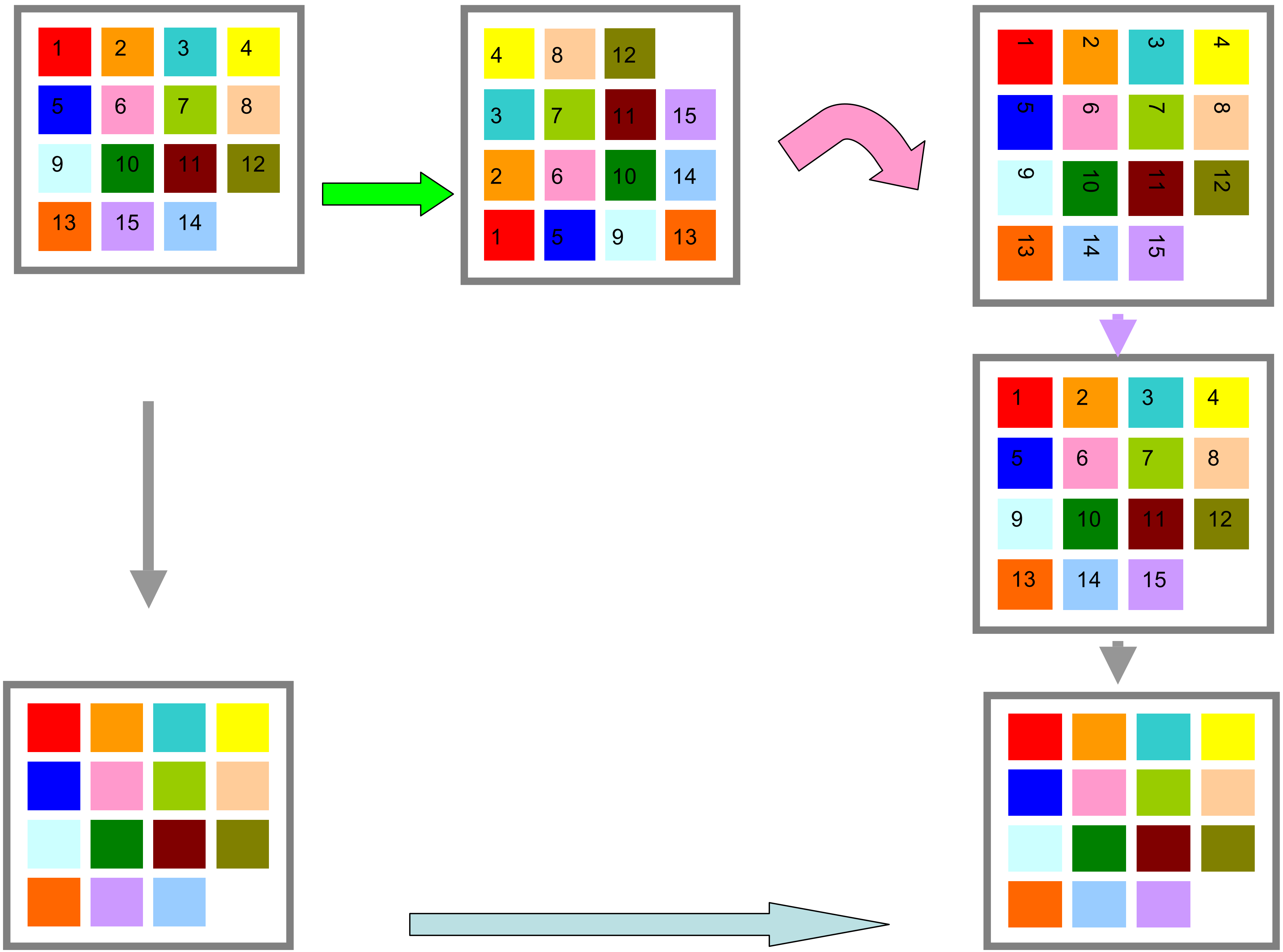

1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15
PUZZLE GAME
NOUVEAU CASSE-TÊTE AMÉRICAIN


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15


1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14
4 8 12
3 7 11 15
2 6 10 14
1 5 9 13
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15
1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15

$$\mu = WVd^3h^3g^3b^3d^3h^3g^2bgb^2d^3h^3g^2b^2dh^2g^2$$


1


10


1


2


3


4


5


6

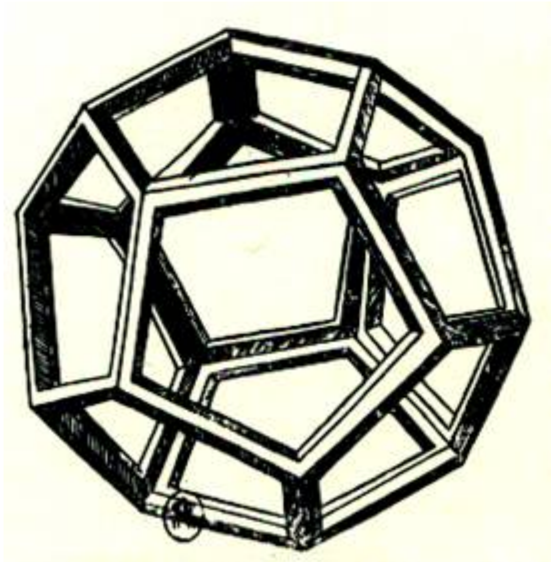

7

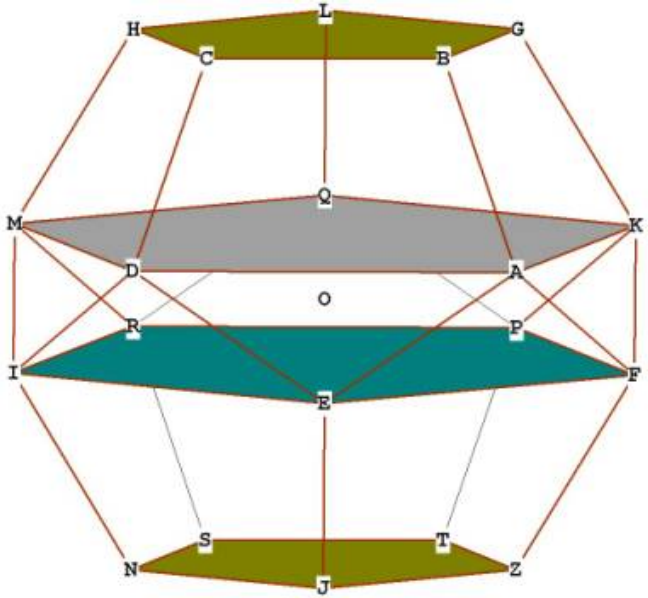

8

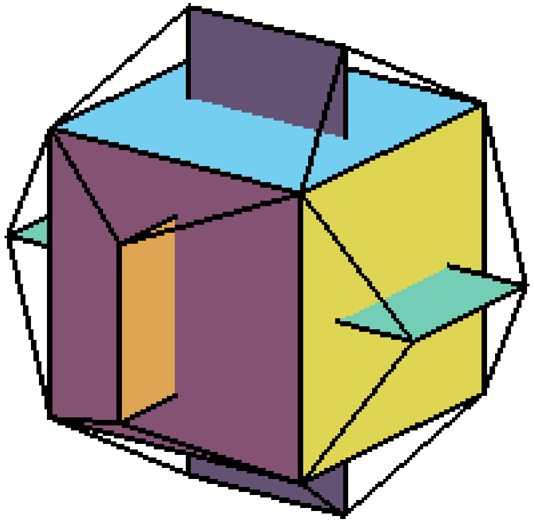

9


10

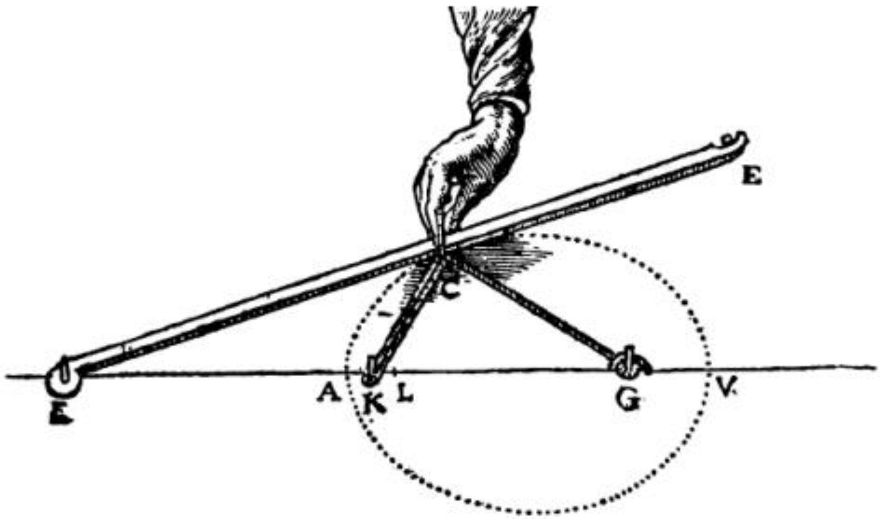
$$(0, \pm\frac{1}{\phi}, \pm\phi),\ (\pm\phi, 0, \pm\frac{1}{\phi})\ (\pm\frac{1}{\phi}, \pm\phi, 0),\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

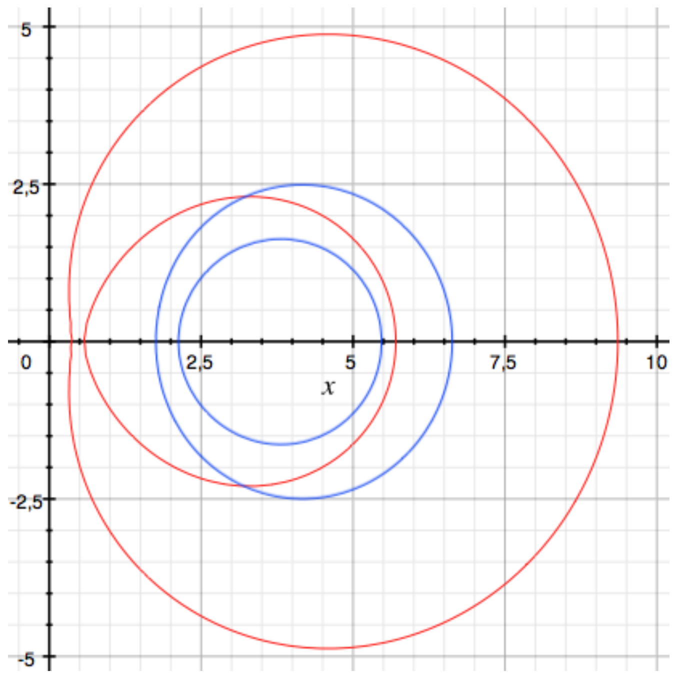


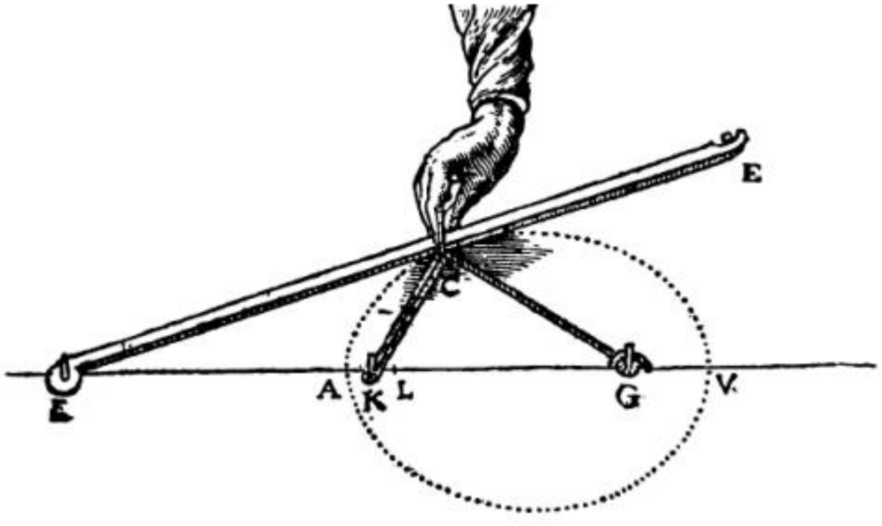


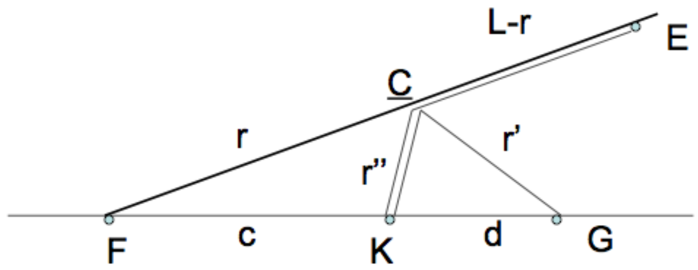


$$\left(0, \pm\frac{1}{\phi}, \pm\phi\right),\ \left(\pm\phi, 0, \pm\frac{1}{\phi}\right)\ \left(\pm\frac{1}{\phi}, \pm\phi, 0\right),\ (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

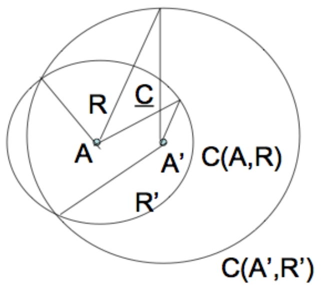

E
C
A
K
L
G
V
E


5
2,5
0
-2,5
-5
2,5
5
7,5
10
x

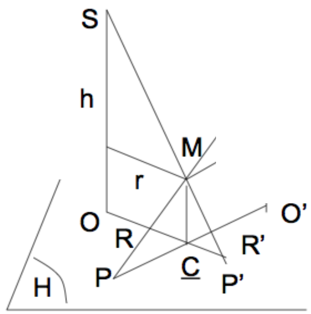




$$f = L - r + 2r'' + r', \quad r^2 d - r''^2(c+d) + r'^2 c - d(c+d)c = 0,$$
$$ar + br' = k.$$



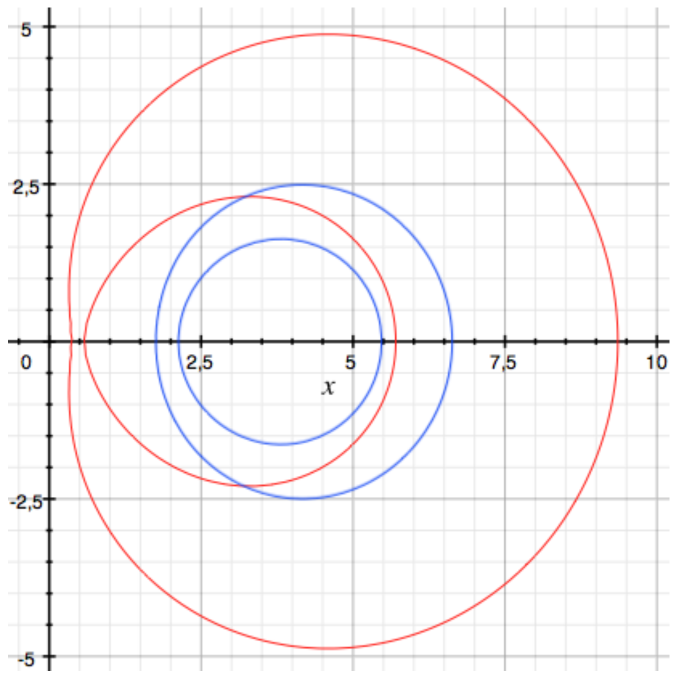
$r/R + r'/R' = 1$



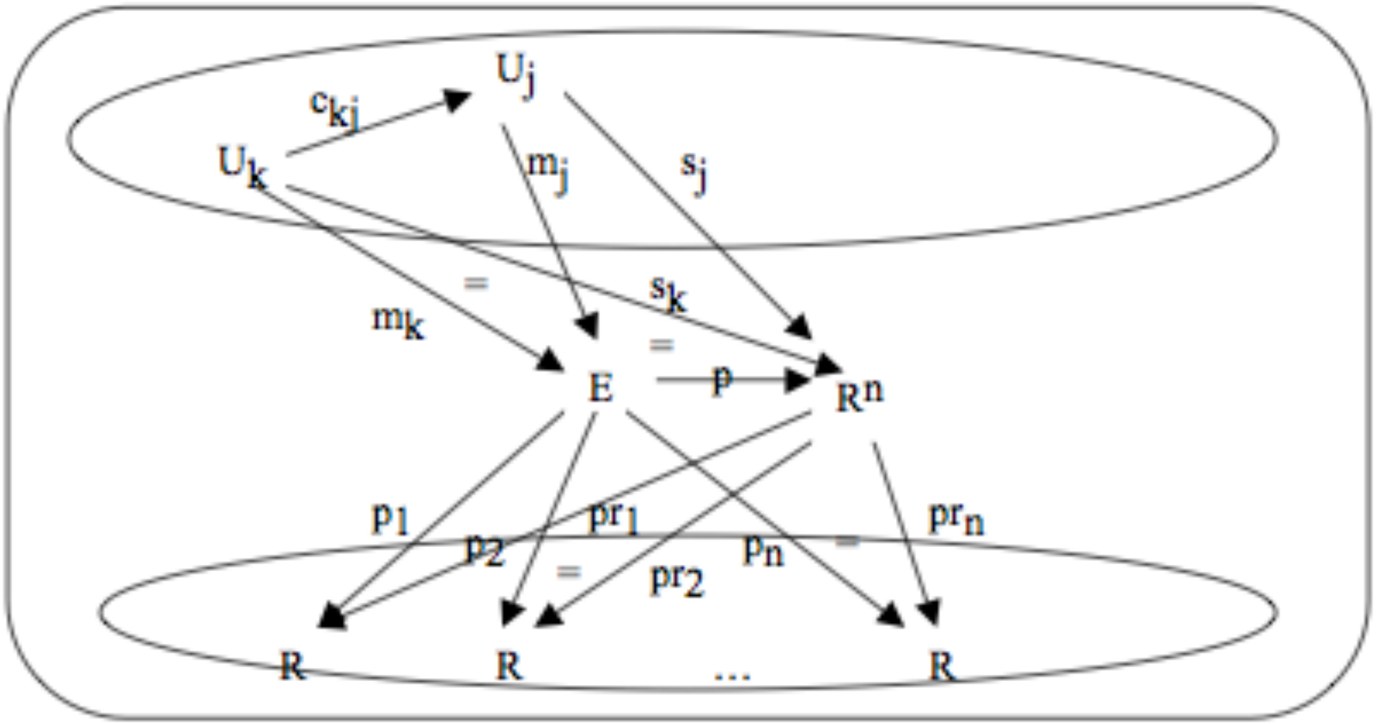
$r.h/R - r'h'/R' = h - h'$

$$[(1-n^2)(x^2+y^2)+2n^2px+q^2-n^2p^2]^2 = 4q^2(x^2+y^2)$$

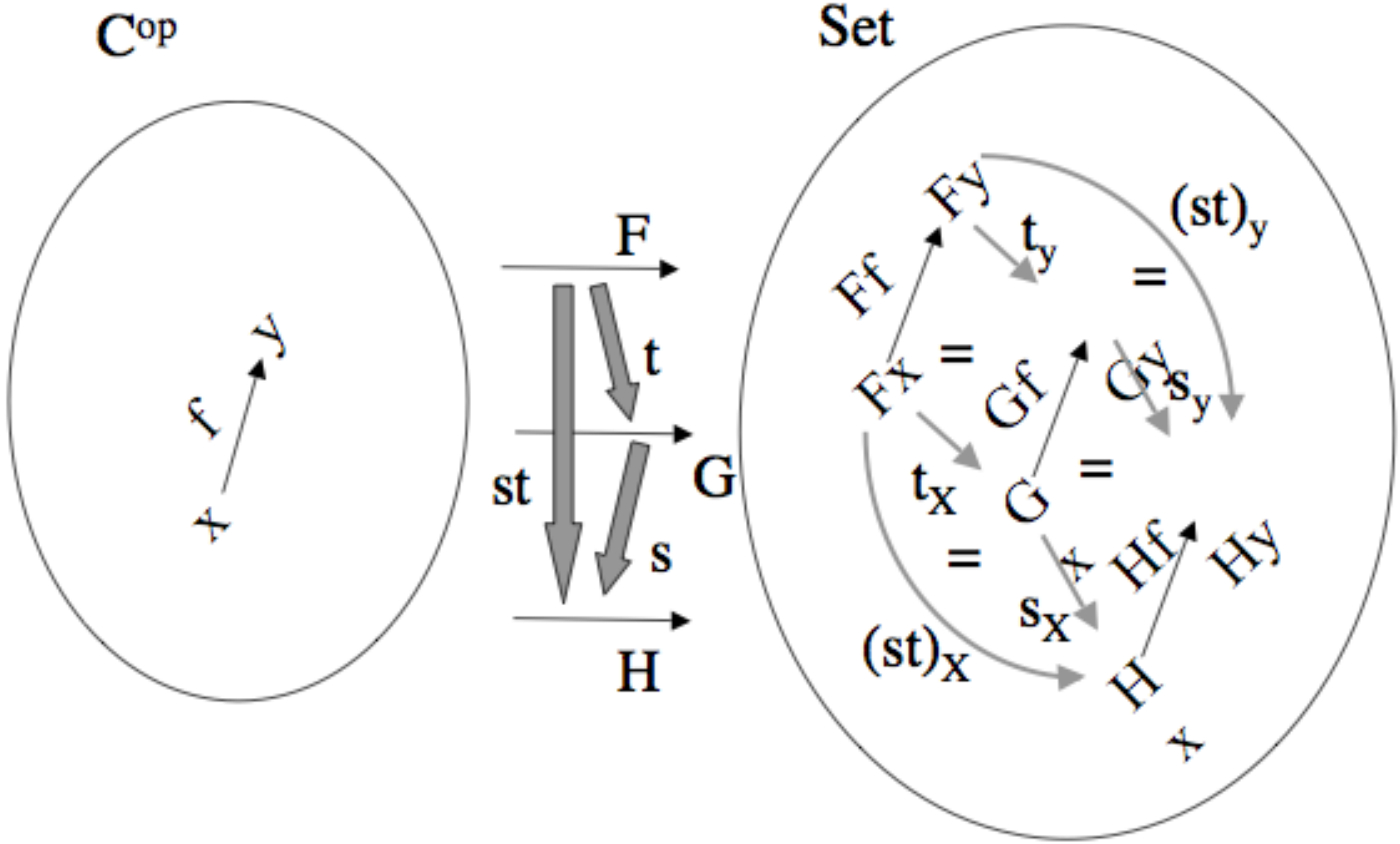
$$(-3x^2-3y^2+24x-k-36)^2 = 4k(x^2+y^2)$$



Formes



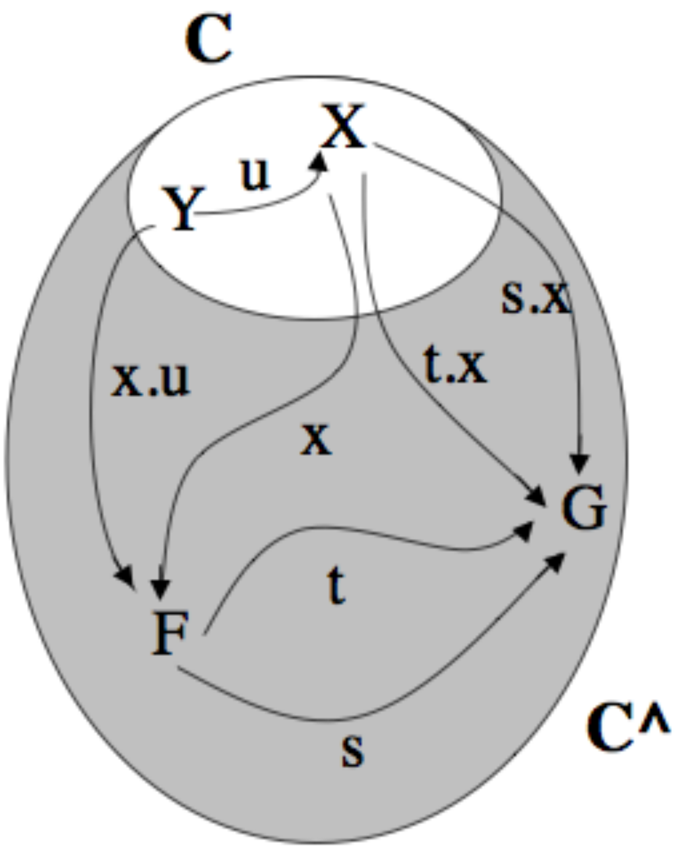
U_j
c_{kj}
U_k
m_j
s_j
$=$
s_k
m_k
$=$
E
p
R^n
p_1
pr_1
pr_n
p_2
p_n
$=$
$=$
pr_2
R
R
...
R



C^{op}
Set
x
f
y
F
G
H
t
s
st
Fx
Fy
Ff
Gx
Gy
Gf
Hx
Hy
Hf
t_x
t_y
s_x
s_y
$(st)_x$
$(st)_y$
=
=
=
=
=

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "y.f"] & \\
Z' \arrow[ur, "z"] \arrow[rr, "f.z"] \arrow[drr, "y.f.z"'] & & Y \arrow[d, "y"] \\
 & & Y'
\end{tikzcd}
$$

Yoneda lemma



$x \in FX$

$x.u = F(u)(x)$

$t.x = t_X(x)$

t is natural $\Leftrightarrow (t.x).u = t.(x.u)$

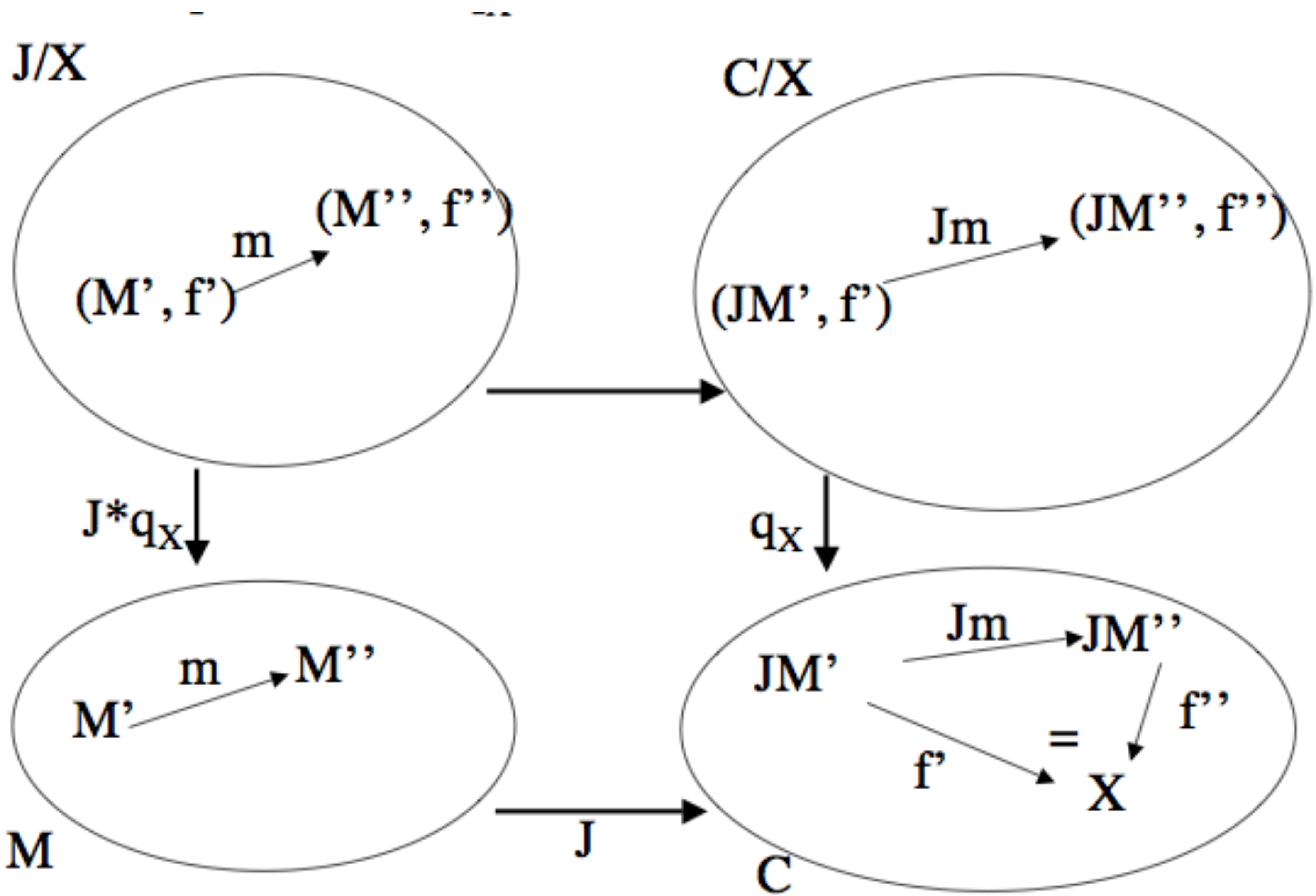
$(t.x).u = t_X(x).u = G(u)(t_X(x)),$

$t.(x.u) = t.F(u)(x) =$
$t_Y(F(u)(x)).$

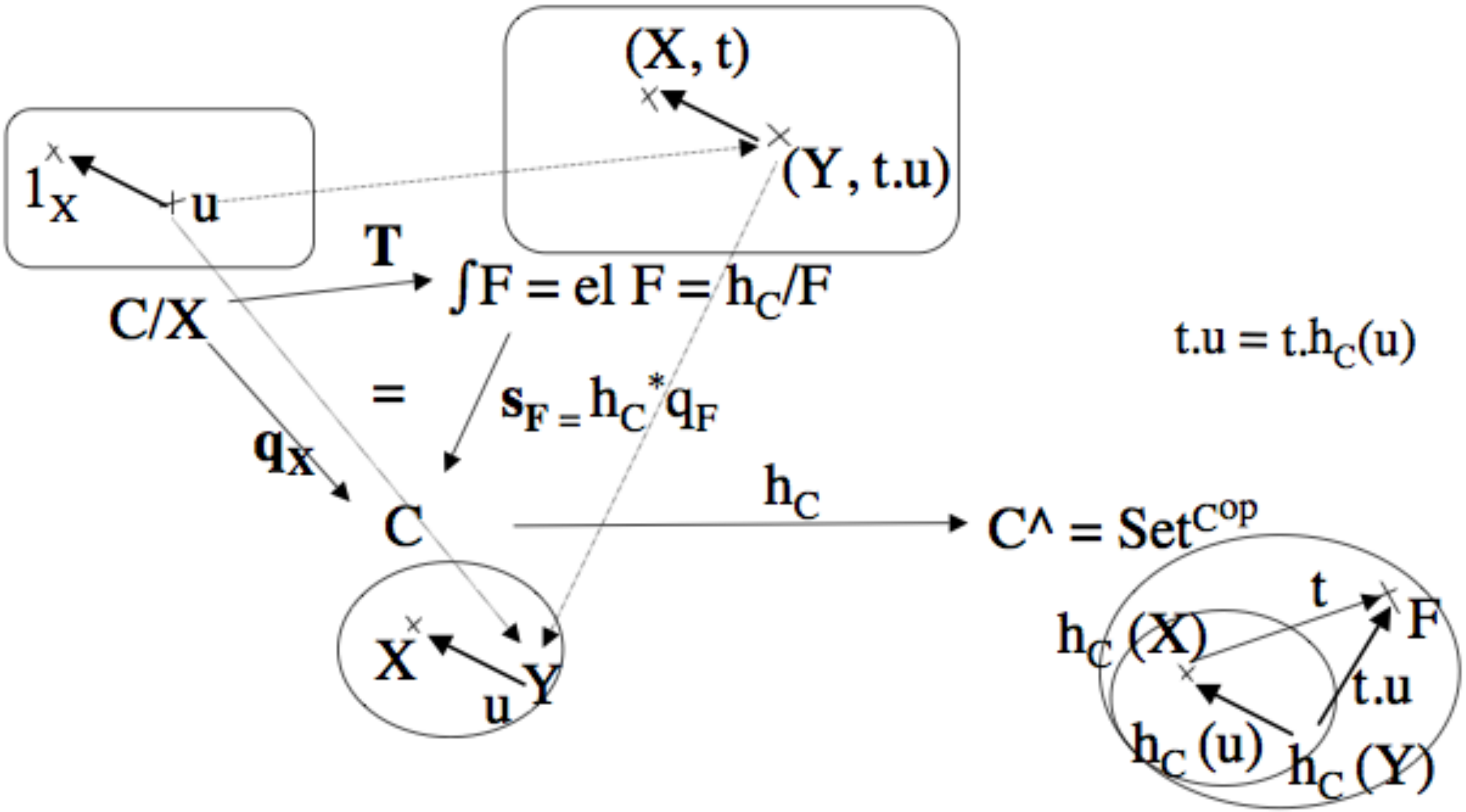
$(t : F \to G) = (s : F \to G)$

$\Leftrightarrow$

$\forall X, \forall x : X \to F, \quad t.x = s.x$



J/X
C/X
m
(M'', f'')
(M', f')
Jm
(JM'', f'')
(JM', f')
J*q_X
q_X
m
M''
M'
Jm
JM''
JM'
f''
=
f'
X
M
J
C

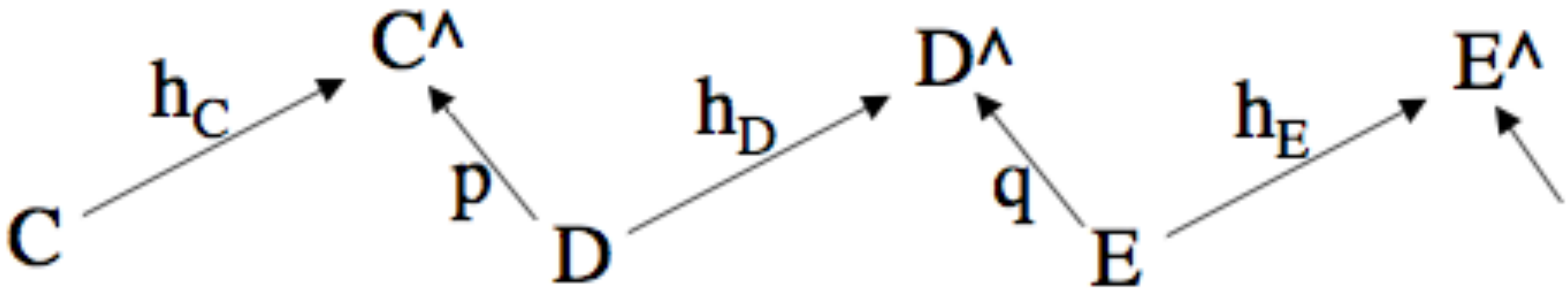


(X, t)
(Y, t.u)
1X
u
T
∫F = el F = hC/F
C/X
t.u = t.hC(u)
=
sF = hC*qF
qX
hC
C
C^ = SetCop
X
Y
u
t
F
hC (X)
t.u
hC (u)
hC (Y)

$$
\begin{tikzcd}
h_{Aff}/S \arrow[rr, bend left, "\text{C, lax functor (ex : S-stack)}"] \arrow[d] & & Cat \\
Aff \arrow[rr, "h_{Aff}"] \arrow[d, phantom, "="] & & Set^{Aff^{op}} \arrow[d, phantom, "="] \\
Ring^{op} \arrow[rr, "k_A^{op}"] & & Set^{Ring} \ni S \text{ (ex : scheme)}
\end{tikzcd}
$$

Ring = category of unitary commutative rings

Aff = category of affine spaces


C^
D^
E^
h_C
h_D
h_E
p
q
C
D
E